Teorie nutná ke zvládnutí cvičení 2

I.3. Nezávislost náhodných jevů

Definice. (Nezávislé jevy) Jevy $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ jsou **nezávislé**, pokud pro každé $r \leq n$ a každou $\{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, n\}$ platí

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_{i_r}).$$

Speciálně dva jevy $A, B \in \mathcal{F}$ jsou nezávislé, pokud

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Definice. (Po dvou nezávislé jevy) Jevy $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ jsou **po dvou nezávislé**, pokud pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ platí

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(A_j).$$

Poznámka (Vztah nezávislosti a podmíněné pravděpodobnosti) Jevy $A, B \in \mathcal{F}$ jsou nezávislé právě když $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, má-li tato podmíněná pravděpodobnost smysl.

II. Náhodné veličiny

II.1. Rozdělení náhodné veličiny

Definice (Náhodná veličina)**.** (Reálná) náhodná věličina X je měřitelné zobrazení (funkce) z prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ do prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, kde $\mathcal{B}$ značí Borelovskou σ-algebru. Prvkům $\omega \in \Omega$ tedy přiřazuje reálné číslo $X(\omega) \in \mathbb{R}$.

Definice (Rozdělení náhodné veličiny)**.** Buď $X : \Omega \to \mathbb{R}$ náhodná veličina. Rozdělení náhodné veličiny X je pravděpodobnostní míra P_X na $\mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$P_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) \quad B \in \mathcal{B}$$

Definice (Distribuční funkce)**.** Distribuční funkcí náhodné veličiny rozumíme funkci $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definovanou předpisem

$$F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = P_X((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Poznámka Rozdělení náhodné veličiny X je jednoznačně určeno jeho distribuční funkcí F_X.

Poznámka (Vlastnosti distribuční funkce) Pro distribuční funkci F_X vždy platí

- je neklesající
- je zprava spojitá
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$
- $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$, pro libovolné $a < b$

Definice (Diskrétní náhodná veličina)**.** Diskrétní náhodná veličina nabývá nejvýše spočetně mnoha hodnot $x_1, x_2, ... \in \mathbb{R}$.

Definice (Spojitá náhodná veličina)**.** Spojitá náhodná veličina nabývá nespočetně mnoha hodnot z nějakého podintervalu $\mathbb{R}$.